



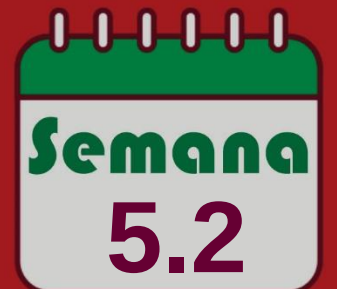
ce
pre
UNI

Álgebra

CICLO
PREUNIVERSITARIO

2024-1

TEMA **TEORÍA DE POLINOMIOS**



CONTENIDOS

1. Expresión Algebraica
2. Polinomio
3. Grado de un polinomio
4. Valor numérico
5. Polinomios especiales

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Es una expresión matemática que relaciona variables y constantes mediante las operaciones aritméticas: adición, multiplicación, potenciación y radicación.

Ejemplos

i. $p(x, y) = 4y + x^5 - \sqrt[3]{2}x^2y^3$

E.A. Racional Entera

ii. $q(x, y, z) = x^4 - zy^{-3} - \sqrt{2}$

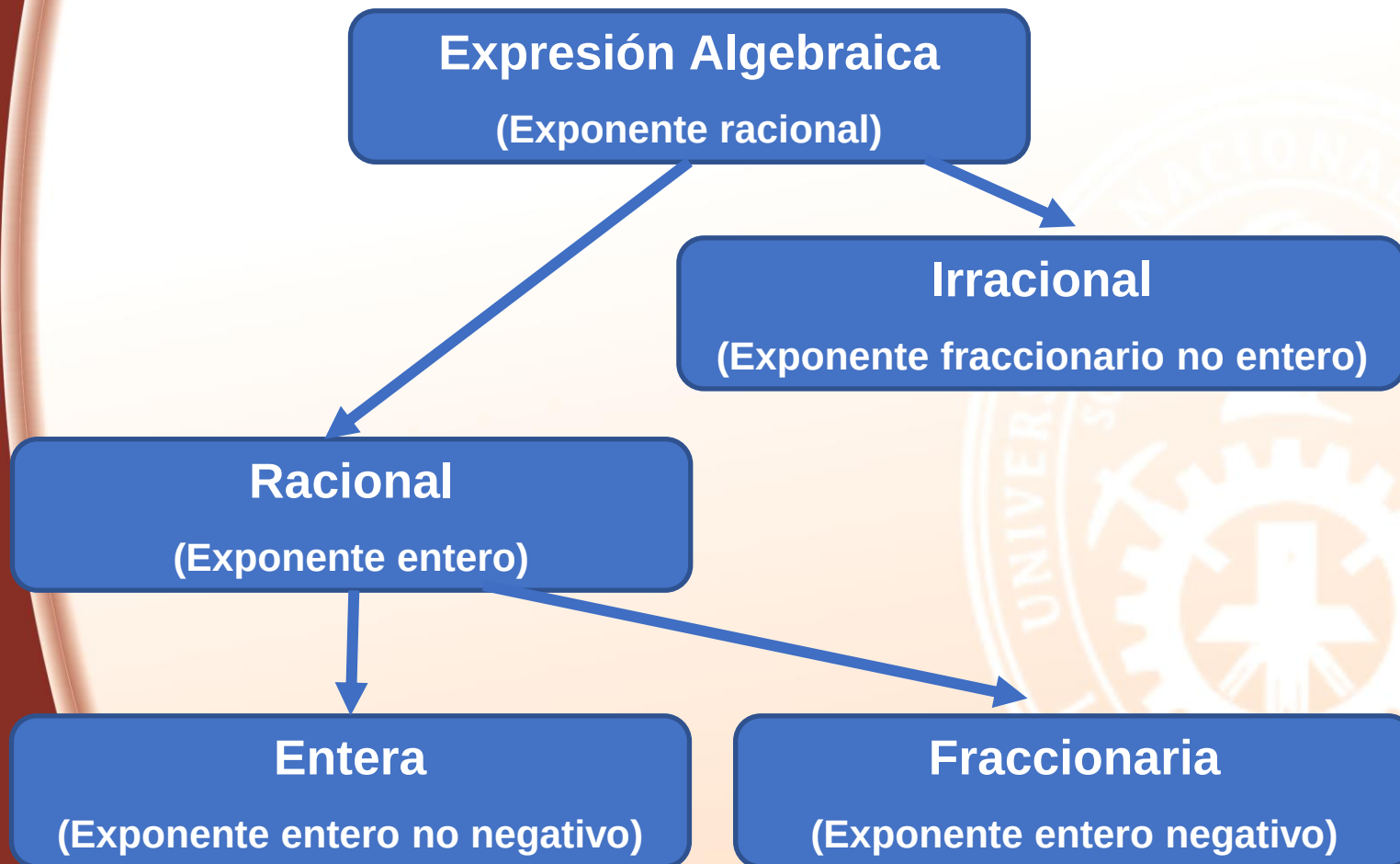
E.A. Racional Fraccionaria

iii. $r(x) = x^3 - 2\sqrt{x^3} + 8y$

E.A. Irracional

iv. $s(x, y) = \log x - 8y + e^y$

No es Expresión Algebraica



POLINOMIO

Un polinomio es una expresión algebraica racional entera.

Polinomio definido sobre K

Diremos que un polinomio está definido sobre K , si sus coeficientes pertenecen al conjunto K ($K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

Ejemplos

- i. $p(x; y) = 5x^4 - 3x^2y^2 + 2x^4$, polinomio definido sobre $\mathbb{Z}$.
- ii. $q(x; y; z) = \frac{2}{3}xy - 4y^2 - \frac{3}{5}z$, polinomio definido sobre $\mathbb{Q}$.
- iii. $w(x) = -x^4 + \pi x^2 + \sqrt{3}$, polinomio definido sobre $\mathbb{R}$.

Observación

Denotaremos por $K[x]$ al conjunto de todos los polinomios de variable x con coeficientes en K .

Polinomio de una variable

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \dots a_nx^n \in K[x]$$

$$a_0, a_1 \dots \dots a_n, \in K; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

- $a_0, a_1 \dots \dots a_n$ son los coeficientes del polinomio $p(x)$.
- El término a_0 es el término independiente del polinomio $p(x)$.
- Si $a_n \neq 0$, a_n se denomina el coeficiente principal del polinomio y n representa el grado del polinomio.
- Si $a_n = 1$, $p(x)$ se denomina **polinomio mónico**.

Ejemplos

- $p(x) \in \mathbb{Q}[x]: p(x) = 2x^5 - \frac{3}{5}x^3 + x^2$
- $q(t) \in \mathbb{R}[t]: q(t) = -2t^{15} - 4t^{16} - \sqrt{3}t + 7$
- $r(x) \in \mathbb{Z}[x]: r(x) = 3 = 3x^0$

Ejercicio

Sea el polinomio mónico de 3 términos

$$p(x) = ax^{5a-b} + 2x^{b-2c} + cx^{c-1}$$

con término independiente igual a la mitad de su grado. Determine la suma de coeficientes del polinomio.

Solución

Si cx^{c-1} es el término principal entonces $c = 1$ esto hace que el polinomio sea constante y el polinomio no sería de 3 términos. Por tanto $a = 1$.

Si cx^{c-1} es término independiente, entonces $c = 1$ y $5a - b = 2(1)$, luego $b = 3$. La suma de coeficientes es $1 + 2 + 1 = 4$

Respuesta: 4

Polinomio de una variable

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \dots a_nx^n \in K[x]$$

$$a_0, a_1 \dots \dots a_n, \in K; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Polinomios de varias variables

i. $p(x, y, z) = 2x^3y^2z^4 - \sqrt{3}xy^5z^2 + \frac{1}{2}x^5y \in \mathbb{R}[x, y, z]$

ii. $p(x, y) = \frac{2}{3}x^2y^3 + 3x^5y^2 - \frac{1}{2}x^6y \in \mathbb{Q}[x, y, z]$

Monomio

Polinomio que posee un solo término.

Ejemplos

i. $p(x, y, z) = 2x^5y^3z$

ii. $q(t) = 4t^{12}$

iii. $w(x) = -2$

Grado de un monomio

Viene dado por la suma de los exponentes del monomio.

Ejemplos

- i. $p(x, y) = 7x^3y^2z^4$, su grado es 5
- ii. $q(t) = \frac{3}{7}t^9$, su grado es 9
- iii. $r(x) = -5$, su grado es 0
- iv. $n(x) = 0$, **no posee grado definido**

Términos semejantes

Si dos monomios poseen las mismas variables y los exponentes de las variables son iguales, se dirá que son términos semejantes.

Ejemplos

- i. $p(x, y) = 3x^5y$, es semejante a $q(x, y) = 2x^5y$
- ii. $q(t) = -2t^4$, es semejante a $w(t) = 15t^4$
- iii. $M(x, y) = 4x^2y^3z$, es semejante a $N(x, y) = 6x^2y^3z^5$

Grado absoluto de un polinomio (GA)

Es el mayor grado de los monomios que conforman el polinomio.

Ejemplos

i. Dado $p(x, y) = 7x^4y$, se tiene que: $GA(p) = 5$

ii. Dado $q(x, y, z) = \underbrace{10x^2y^5}_7 - \underbrace{3x^{20}y^{13}z^3}_{36} + \underbrace{66xy^{24}z}_{26}$

se tiene que: $GA(q) = 36$

iii. Dado $w(x) = \underbrace{7x^4}_4 - \underbrace{5x^2}_2 + \underbrace{x^5}_5 - \underbrace{3x}_1$, se tiene que: $GA(w) = 5$

Nota:

- Al grado absoluto usualmente se le denomina grado del polinomio.
- El polinomio nulo no posee grado definido.

Grado del polinomio	Nombre común
Polinomio de grado 0	Polinomio constante no nulo
Polinomio de grado 1	Polinomio lineal
Polinomio de grado 2	Polinomio cuadrático
Polinomio de grado 3	Polinomio cúbico

Nota:

- Los polinomios de grado mayor que 3 no tienen nombre común, solo se les llamará por su grado, por ejemplo, polinomio de grado 5.

Ejemplos

- $p(x, y) = 7x^4 - x^2y + 2xy - 1$, polinomio de grado 4.
- $q(x, y, z) = x^3 - 2xy + 6z^2$, polinomio cúbico.
- $w(x) = 1 - 2x$, polinomio lineal.
- $s(x, y) = 2x - xy + 4$, polinomio cuadrático.

Ejercicio

Calcule el grado del polinomio

$$P(x; y) = 8x^{n-2} + 2023xy^{\frac{8}{5-n}} + \frac{3}{n-4}xy^{4-n}$$

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

Solución

Por el grado del Polinomio:

$$n - 2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \frac{8}{5-n} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad 4 - n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$n = 2, 3, 4, \dots \wedge n = -3, 1, 3, 4 \wedge n = 4, 3, 2, 1, \dots$$

$$\rightarrow n = 3, 4$$

Por los coeficientes:

$$n \neq 4$$

Luego:

$$P(x; y) = 8x + 2012xy^4 - 3xy$$

$$GA(P) = \max\{1, 5, 2\} = 5$$

Respuesta: 5

Valor numérico de un polinomio

Es el resultado que se obtiene al reemplazar la(s) variable(s) por un valor constante.

Ejemplos

- i. $p(x, y) = 3x^5y^2 - 2x^2y + 5x$, entonces $p(-1, 2) = -6$
- ii. $q(t) = 10t^2 - \frac{4}{3}t - \frac{5}{6}$, entonces $q\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
- iii. $r(x) = -1$, entonces $r(0) = -1$

Ejercicio

Sea $p(x, y)$ un polinomio lineal, con termino independiente negativo, además cumple

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: p^2(x, y) = (2x + 3y)[p(x, y) - 1] + 1$$

Determine $p(2, -1)$.

Solución

$$p^2(2, -1) = (2(2) + 3(-1))(p(2, -1) - 1) + 1$$

$$(p(2, -1) + 1)(p(2, -1) - 1) = p(2, -1) - 1$$

$$p(2, -1) + 1 = 1$$

$$p(2, -1) = 0$$

Respuesta: 0

Propiedades

- La suma de coeficientes de un polinomio es igual al valor numérico del polinomio con todas sus variables iguales a 1.
- El termino independiente de un polinomio es igual al valor numérico del polinomio con todas sus variables iguales a cero.

Ejemplos

i. $p(x, y) = 3x^5y^2 - 2x^2y + 5x$

$$\text{Suma de coeficientes} = p(1, 1) = 6$$

ii. $q(t) = 10t^2 - \frac{4}{3}t - \frac{5}{6}$

$$\text{Termino independiente} = q(0) = -\frac{5}{6}$$

Ejercicio

Determine la suma de coeficientes y el término independiente del polinomio $p(x)$ si:

$$p(3 - x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$$

Ejercicio

Determine la suma de coeficientes y el término independiente del polinomio $p(x,y)$ si :

$$p(x + 1, y - 1) = -2x^2y + 3xy$$

Grado relativo de un polinomio (GR)

Es el mayor exponente de la variable en referencia.

Ejemplos

- i. Dado $p(x, y) = 7x^4y$, se tiene que: $GR_x(p) = 4$ y $GR_y(p) = 1$
- ii. Dado $q(x, y, z) = 10x^2y^5 - 3x^{20}y^{13}z^3 + 66xy^{34}z$, se tiene que:
 $GR_x(q) = \max\{2; 20; 1\} = 20$
 $GR_y(q) = \max\{5; 13; 34\} = 34$
 $GR_z(q) = \max\{3; 1\} = 3$

Ejercicio

Dado el polinomio definido sobre $\mathbb{Z}$

$$P(x, y, z) = x^3y^2 - 3xyz^2 + 5y^3z^m$$

Tal que satisface $GR_x(P) + GR_y(P) = GA(P)$.

Calcule el valor de $P(m - 2, m - 1, m - 3)$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

Solución

$$GR_x(P) = \max\{3; 1\} = 3$$

$$GR_y(P) = \max\{2; 1; 3\} = 3$$

$$GA(P) = \max\{5; 4; 3 + m\} = \max\{5; 3 + m\}$$

Luego:

$$GR_x(P) + GR_y(P) = GA(P)$$

$$3 + 3 = \max\{5, 4, m + 3\}$$

$$6 = m + 3$$

$$m = 3$$

Luego:

$$P(x, y, z) = x^3y^2 - 3xyz^2 + 5y^3z^3$$

Finalmente:

$$P(m - 2, m - 1, m - 3) = P(1, 2, 0) = 4$$

Respuesta: 4

POLINOMIOS ESPECIALES

1. Polinomio homogéneo

Un polinomio se denomina homogéneo si todos sus monomios poseen el mismo grado, al cual se le denomina grado de homogeneidad.

Ejemplos

- i. $q(x, y) = 7x^4y + x^3y^2 - 2y^5$, es homogéneo de grado 5.
- ii. $p(x, y) = -x^4y^5$, es homogéneo de grado 9.
- iii. $r(x) = 3$, es homogéneo de grado 0.

Definición Equivalente de Polinomio Homogéneo

$p(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z] \setminus \{0\}$ es un polinomio homogéneo, si $\forall \lambda \neq 0$ se cumple que:

$$p(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n p(x, y, z)$$

Siendo n el grado absoluto del polinomio (grado de homogeneidad).

Ejercicio

Sean $m, n, k \in \mathbb{Z}$ tales que $m < n < 7$. Si

$$P(x; y) = x^{m^2+m+k} + x^{\frac{n^2}{5}} y^{m+1} + y^{\frac{n^2}{5}+4}$$

Es un polinomio homogéneo y $P(-1, 2) = a$. Halle el valor de $P(2, -4)$

- A) $64a$ B) $-128a$ C) $128a$ D) $-512a$ E) $512a$

Respuesta: $-512a$

Ejercicio

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El polinomio $P(x, y) = x^2 + xy + 2y$ es homogéneo.

II. Si $P(x; y) = x^2 + xy + 2y$, entonces $Q(x; y; z) = z^3 P\left(\frac{x}{z}; \frac{y}{z}\right)$ es homogéneo.

III. $P(x, y) = 3$ es un polinomio homogéneo.

A) VVV

B) FFV

C) FVV

D) FVF

E) VFV

2. Polinomio Ordenado

Un polinomio es ordenado respecto a alguna de sus variables, cuando los exponentes de esta variable están en forma creciente o en forma decreciente.

Ejemplos

- i. $p(x) = 4x - 9x^3 + 7x^8 + 3x^{15}$, es ordenado en forma ascendente.
- ii. $q(x, y) = 5x^2y^8 + 7x^4y^3 - 3x^7y^2$, es ordenado en forma ascendente respecto a la variable x pero en forma descendente respecto a y .
- iii. $R(x, y) = x^4 - 3xy^3 + 5x^2y^5$, es solo ordenado con respecto a y .

3. Polinomio Completo

Un polinomio se denomina completo respecto a una variable, si el polinomio contiene términos de todos los grados, desde el mayor hasta el de grado cero.

Ejemplos

- i. $p(x) = 5x^2 - 9x^3 + 10 - x + 7x^4$, es completo respecto a x .
- ii. $q(x, y) = 2y^2 - x - 2y - 3x^3y^4 + 6x^5y^3$, es completo respecto a y
- iii. $r(x, y) = 4x - 11y^2 + 5x^2y - x^3y^4 - 8x^4y^3$, es completo respecto a la variable x así como también respecto a la variable y .

Ejercicio

En el polinomio completo y ordenado:

$$P(x) = x^c + 2x^a + 3x^b + 4x^m + \dots + 2b + 2c - 37$$

Encuentre el valor de $T = \frac{a+b+c}{3}$.

A) 12

B) 13

C) 14

D) 15

E) 16

Propiedades

- Si $p(x)$ es un polinomio completo, entonces:
$$\text{N}^\circ \text{ Términos de } p(x) = \text{Grado de } p(x) + 1$$
- En todo polinomio completo y ordenado respecto a una variable, los exponentes de la variable van aumentando o disminuyendo de uno en uno.

Ejemplos

i. $p(x) = 3x^2 + \sqrt{2}x^4 - x^3 + 10 - 5x$

Es un polinomio completo. $\text{N}^\circ \text{ Términos de } p(x) = 4 + 1 = 5$

ii. $q(x, y) = 2x^5y - 3x^4y^5 + 9x^3y^3 + x^2y^6 - 6xy + 8$

Es un polinomio ordenado con respecto a la variable x .

Es completo con respecto a x . $\text{N}^\circ \text{ Términos de } q(x, y) = 5 + 1 = 6$

4. Polinomios idénticos ($\equiv$)

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios en las mismas variables

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Entonces se cumple que:

$$p(x) \equiv q(x) \leftrightarrow a_0 = b_0; a_1 = b_1; \dots; a_{n-1} = b_{n-1}; a_n = b_n$$

Propiedad.

Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios idénticos, se cumple que siempre tendrán el mismo valor numérico para cualquier valor de las variables.

Ejemplos

- i. $p(x) = x^2 - 5 + 2x$ y $q(x) = (x + 1)^2 - 6$ son idénticos.
- ii. $q(x) = (x + 1)^5 - 5x^2(x + 1)^2 - 5x$, es idéntico a $5x^2 + 1$.

5. Polinomio idénticamente nulo

Un polinomio $p(x)$ es idénticamente nulo cuando todos sus coeficientes son nulos.

Dado $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$p(x) \equiv 0 \rightarrow a_0 = 0; a_1 = 0; \dots; a_{n-1} = 0; a_n = 0$

Propiedad

Un polinomio idénticamente nulo siempre tiene su valor numérico igual a cero para cualquier valor de las variables.

Ejemplo

i. $q(x) = (x + 3)^2 - (x - 3)^2 - 12x$, es idénticamente nulo.

Ejercicio

Si el polinomio

$$P(x) = (ax + b)(x - 1) + c(x^2 + x + 1)$$

Es idéntico al polinomio

$$Q(x) = 2x^2 + 5x - 1$$

Calcule el valor de $T = a + b + c$.

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

Ejercicio

Consideremos la siguiente igualdad

$$\forall x \in \mathbb{R}: x^5 + 10x^3 - 9 = (ax + 1)^5 + bx^4 + c(x - 1)^2 + dx,$$

Calcule el valor de $a + \frac{b+d}{c}$.